Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Antje Fruth
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

10.Blatt
Abgabe: 28.06.11

Aufgabe 1: Zeige, dass in einem vollständigen Markt mit Forwardmaßen $\mathbb{P}^T$ $(T > 0)$ die Erwartungswerthypothese

$$f(t,T) = E_{\mathbb{P}^T}[r_T|\mathcal{F}_t]$$

für $t \in [0,T]$ erfüllt ist.

Aufgabe 2: Im Heston-Modell erfüllt die Varianz $v_t = \sigma_t^2$ die SDE

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\,dt + \xi\sqrt{v_t}\,dW_t.$$

Man zeige, dass die Volatilität σ_t eine SDE der Form

$$d\sigma_t = \left(\frac{\alpha}{\sigma_t} - \beta\sigma_t\right)dt + \gamma\,dW_t$$

erfüllt und berechne die Parameter α, β und γ.

Aufgabe 3:

i) Sei W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\tilde{P}$ die Verteilung von $B_t = W_t + bt$, $b \in \mathbb{R}$, und τ eine Stoppzeit mit $P[\tau < \infty] = 1$. Man zeige, dass

$$E[e^{bW_\tau - \frac{b^2}{2}\tau}] = \tilde{P}[\tau < \infty].$$

ii) Sei nun

$$S_t = s\exp\left(\sigma W_t + \big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\big)t\right).$$

Man zeige, dass für die *first passage time* von a, $s > a$,

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : S_t \leq a\}$$

gilt, dass für $\mu \leq \sigma^2/2$ die Wahrscheinlichkeit $P[\tau_a < \infty] = 1$.

iii) Man zeige mit Hilfe von i) und ii), dass für den Erwartungswert der Laplace-Transformierten von τ_a unter dem Martingalmaß

$$E^*[e^{-\mu\tau_a}] = \left(\frac{a}{s}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}, \qquad \mu \geq 0,\ \sigma > 0,$$

gilt.

Aufgabe 4: *American Perpetual Put*
Diese Aufgabe soll zur Berechnung des Preises eines *American Perpetual Put*, also einer Amerikanischen Put-Option mit unendlichem Zeithorizont, im Black-Scholes Modell dienen. Gegeben ist also die Dynamik des Aktienkurses

$$S_t = s \exp\left(\sigma W_t^* + \big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\big)t\right), \qquad r \geq 0,\, \sigma > 0,$$

und die Auszahlung

$$H_t := (K - S_t)^+, \qquad t \geq 0.$$

Gesucht ist der Preis

$$\Pi(H) = \sup_\tau E^*[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+],$$

wobei das Supremum über alle Stoppzeiten $\tau \geq 0$ genommen wird und wir annehmen, dass $r \leq \frac{\sigma^2}{2}$.

i) In einem ersten Schritt beschränken wir uns auf die *Passierzeiten*, also Stoppzeiten der Form

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 \,:\, S_t \leq a\}$$

für $a \leq K$. Die "Performance" der jeweiligen Stoppzeit ist gegeben durch die Funktion

$$g_a(s) = E^*[e^{-r\tau_a}(K - S_{\tau_a})^+ \,|\, S_0 = s].$$

Man maximiere $g_a(s)$ über alle $a \in [0, K]$ mit Hilfe von Aufgabe 3.

ii) Sei nun a^* das entsprechende Maximum. Man zeige mit Hilfe der Itô-Formel, dass

$$\Big(g_{a^*}(S_{t\wedge\tau})e^{-r(t\wedge\tau)}\Big)_{t\geq 0} \quad \text{ein } P^*\text{-Supermartingal für jede Stoppzeit } \tau \text{ und}$$
$$\Big(g_{a^*}(S_{t\wedge\tau_{a^*}})e^{-r(t\wedge\tau_{a^*})}\Big)_{t\geq 0} \quad \text{ein } P^*\text{-Martingal ist.}$$

Man diskutiere die Anwendbarkeit der Itô-Formel in diesem Fall!

iii) Man zeige, dass für jede Stoppzeit $\tau > 0$

$$E^*[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+] \leq E^*[e^{-r\tau_{a^*}}(K - S_{\tau_a^*})^+]$$

gilt.