Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Antje Fruth
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

11.Blatt
Abgabe: 05.07.11

Aufgabe 1: Man zeige: Eine Folge (X^n) von Zufallsvariablen, $X^n \geq 0$ ist genau dann NICHT gleichgradig integrierbar, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass entlang einer Teilfolge X^{n_k} disjunkte Mengen A_k existieren, so dass

$$E[X^{n_k} \mathbb{1}_{A_k}] \geq \varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Aufgabe 2: Wir betrachten im Folgenden einen Finanzmarkt mit Aktienpreisprozess

$$S_t = s \exp\left(\sigma_1 W_t^1 + \sigma_2 W_t^2 + \left((\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\right)t\right)$$

und konstanter Zinsrate r, wobei W^1 und W^2 zwei unabhängige Brownsche Bewegungen sind.

i) Man bestimme die an $(\mathcal{F}_t^{W^1,W^2})$ adaptierten stochastischen Exponentiale $Z = \mathcal{E}(L)$, so dass $Z\tilde{S}$ ein lokales Martingal ist.
Hinweis: Man benutze den Itô-Darstellungssatz für die zweidimensionale Brownsche Bewegung.

ii) Sei nun $\sigma_2 = 0$. Was ist dann der Superhedging-Preis von

$$H = \left(K - e^{W_T^1 + W_T^2}\right)^+ ?$$

iii) Sei weiterhin $\sigma_2 = 0$. Man berechne

$$U_t = \operatorname*{ess\,sup}_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[\tilde{H} \big| \mathcal{F}_t]$$

und schreibe dies wie in der optionalen Zerlegung.

Aufgabe 3: In einem zinsfreien, illiquiden Markt $(r = 0)$ betrachten wir das Nutzenoptimierungsproblem für die exponentielle Nutzenfunktion

$$u(x) = -e^{-\alpha x}, \qquad \alpha > 0,$$

und den Vermögensprozess

$$\begin{aligned} dV_t^x &= \theta_t(\sigma\, dW_t + \mu\, dt) - \frac{\beta}{2}\theta_t^2\, dt, \\ V_0^x &= x. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\beta > 0$ eine konstante, die die Illiquidität des Marktes beschreibt.

i) Man leite die Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung für die Wertfunktion

$$U(x, T) = \sup_{\theta \in \Theta} E[u(V_T^x)]$$

her, wobei Θ die Menge aller fast-sicher quadratintegrierbaren, vorhersehbaren Strategien ist.

ii) Man löse diese HJB-Gleichung zu einem geeigneten Randwert mit Hilfe des Separationsansatzes explizit.

iii) Man bestimme die optimale Strategie θ^*.

iv) Man begründe, warum wir für $\beta > 0$ jede fast-sicher quadratintegrierbare, vorhersehbare Strategie zulassen können.

Aufgabe 4: *Portfolioliquidierung*
In einem illiquiden Mark betrachten wir das Portfolioliquidierungsproblem für die exponentielle Nutzenfunktion

$$u(x) = -e^{-\alpha x}, \qquad \alpha > 0,$$

und den Vermögensprozess

$$dV_t = \sigma\theta_t \, dW_t - \beta\xi_t^2 \, dt, \qquad V_0 = v.$$

Hierbei ist θ die Strategie mit zugehöriger Handelsgeschwindigkeit ξ, d.h.

$$d\theta_t = -\xi_t dt, \qquad \theta_0 = x.$$

i) Man leite die Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung für die Wertfunktion

$$U(v, x, T) = \sup_{\theta \in \Theta(T)} E[u(V_T)]$$

her, wobei $\Theta(T)$ die Menge aller Strategien ist, so dass alle Aktien bis T verkauft werden, d.h. $\theta_T = 0$ bzw. $\int_0^T \xi_t dt = x$.

ii) Mit Hilfe der Lösung

$$U(V_t, \theta_t, T-t) = -\exp\left(-\alpha\left[V_t - \beta\sqrt{\frac{\alpha\sigma^2}{2\beta}} \coth\left(\sqrt{\frac{\alpha\sigma^2}{2\beta}}(T-t)\right)\theta_t^2\right]\right)$$

berechne man die optimale Handelsgeschwindigkeit $(\xi_t^*)_{t\in[0,T]}$.