Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Antje Fruth
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

5.Blatt
Abgabe: 24.05.11

Aufgabe 1: Wir betrachten im Black-Scholes Setting den Fall einer kontinuierlichen Dividendenzahlung (was eine gute Approximation etwa für Fonds, die aus etlichen Aktien bestehen, ist). Die kontinuierliche Dividendenzahlung mit der Rate δ reduziert den Wert der Aktie um diesen Betrag. Die stochastische Differentialgleichung für den Preisprozess der Aktie lautet also

$$dS_t = \sigma S_t \, dW_t + (r - \delta) S_t \, dt.$$

Die Dividenen werden sofort auf unseren Cash Account transferiert. Man stelle für dieses Modell die entsprechende Black-Scholes-Differentialgleichung auf und berechne den Preis einer Europäischen Call-Option.

Aufgabe 2: Wir betrachten im Black-Scholes Modell die Anlagestrategie des *Constant Proportional Portfolio Insurance (CPPI)*: Wir investieren einen konstanten Anteil unseres Vermögens in die Aktie (also $\theta_t = \beta V_t / S_t$, $\beta \in \mathbb{R}$).

a) Man stelle die stochastische Differentialgleichung für den Vermögensprozess V_t auf und löse sie explizit.

b) Man finde diejenige Investitionsstrategie, die das schnellste exponentielle Wachstum hat, man bestimme also β so, dass es den Erwartungswert von $\log V_t$ maximiert.

Aufgabe 3: Wir betrachten einen Finanzmarkt $\bar{S} = (S^0, S) = (S^0, S^1, \ldots, S^d)$, der aus $d+1$ Anlagen besteht, und zwar aus einem Cash Account und d riskanten Assets:

$$\begin{aligned} S_t^0 &= \exp\left(\int_0^t r_s \, ds \right); \\ dS_t^i &= r_t S_t^i \, dt + \sigma_t^i S_t^i \, dW_t^i \quad S_0^i = s_0^i, \quad i = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

Hier sind die W^i unabhänge Brownsche Bewegungen und $0 < r_s, \sigma_s^i < \infty$. Eine vorhersagbare und beschränkte Strategie $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi)$ ist bekanntlich selbstfinanzierend, falls der Wertprozess $V_t = \sum_{i=0}^d \xi_t^i S_t^i$ die stochastische Differentialgleichung

$$dV_t = \bar{\xi} \, d\bar{S}_t = \sum_{i=0}^d \xi_t^i \, dS_t^i$$

erfüllt. Man zeige, dass dies äquivalent zu den folgenden Bedingungen ist.

a) Der diskontierte Wertprozess $\tilde{V}_t := \frac{V_t}{S_t^0}$ erfüllt bezüglich $\tilde{S}_t^i := \frac{S_t^i}{S_t^0}$, $i = 0, \ldots, d$ die stochastische Differentialgleichung

$$d\tilde{V}_t = \xi \, d\tilde{S}_t.$$

b) Der Wertprozess unter dem Numéraire N, $N \in \{S^1, \ldots, S^d\}$, $\tilde{V}_t^N := \frac{V_t}{N_t}$ erfüllt bezüglich $\tilde{S}_t^{N,i} := \frac{S_t^i}{N_t}$, $i = 0, \ldots, d$ die stochastische Differentialgleichung

$$d\tilde{V}_t^N = \xi^N \, d\tilde{S}_t^N.$$

Bitte wenden

Aufgabe 4:

a) Man schreibe in einer höheren Programmiersprache ein Programm, das zur Simulation von Pfaden einer geometrischen Brownschen Bewegung für $0 \leq t \leq 1$ genutzt werden kann. Dabei soll der Nutzer den Drift α, die Volatilität σ und den Anfangswert S_0 der geometrischen Brownschen Bewegung sowie die Anzahl der Stützstellen n und die Anzahl der zu simulierenden Pfade angeben können. Es soll die entsprechende stochastische Differentialgleichung für die pfadweise Simulation genutzt werden. Ins Tutorium mitzubringen sind der Programmcode und ein Plot von 15 Pfaden mit $\alpha = 1,5$, $\sigma = 0,3$, $S_0 = 100$ und $n = 2^{10} + 1$.

b) Man benutze dieses Programm, um den Preis einer Europäischen at the Money-Call-Option (also Strike $K = 100$) zu berechnen, wobei der Aktienkurs durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit den obigen Parametern gegeben ist und der Cash Account mit $r = 1,05$ verzinst wird.