Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Antje Fruth
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

7.Blatt
Abgabe: 07.06.11

Aufgabe 1: Bei einer Chooser-Option zu gegebener Maturität T und gegebenem Strike K kann der Käufer zu einem festgelegten Zeitpunkt $t_0 \in]0, T[$ entscheiden, ob die Option einen Call oder einen Put (mit Strike K und Maturität T) darstellt. (Dies tut er natürlich auf "vernünftige" Weise.)

a) Man gebe das Auszahlungsprofil der Chooser-Option an.
b) Man berechne den arbitragefreien Preis der Chooser-Option im Black-Scholes Modell.

Aufgabe 2: Man benutze die Girsanov-Transformation, um die folgende Relation zwischen Call- und Put-Preisen in einem Black-Scholes Modell mit Zinsrate $r = 0$ zu beweisen:

$$E_z^* \left[(S_T - K)^+ \right] = zK E_{\frac{1}{z}}^* \left[\left(\frac{1}{K} - S_T \right)^+ \right] = E_K^* \left[(z - S_T)^+ \right],$$

wobei $E_z^*[f(S_T)]$ den Erwartungswert $E_{P^*}[f(S_T)]$ mit der Anfangsbedingung $S_0 = z$ für die geometrische Brownsche Bewegung unter dem äquivalen Martingalmaß P^* bezeichnet.

Aufgabe 3: Es sei $K > B > 0$, $z > B$ und $\tau_B := \inf\{t : S_t = B\}$. Man benutze die starke Markoveigenschaft und die Resultate über den Zusammenhang von Call- und Putpreisen von Aufgabe 2, um in folgenden Schritten den Preis eines *Down-and-in* Calls für Zinsrate $r = 0$ im Black-Scholes Modell zu berechnen.

(i) In einem ersten Schritt zeige man, dass

$$E_z^* \left[(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_{\tau_B} \right](\omega) = \frac{K}{B} E_B^* \left[\left(\frac{B^2}{K} - S_{T-\tau_B(\omega)} \right)^+ \right]$$

P_z^*-fast sicher auf $\{\tau_B \leq T\}$ gilt.

(ii) Hieraus folgere man nun, dass der Preis des *Down-and-in* Calls gegeben ist durch

$$E_z^* \left[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_B \leq T\}} \right] = \frac{K}{B} E_z^* \left[\left(\frac{B^2}{K} - S_T \right)^+ \right] = E_B^* \left[\left(S_T - \frac{zK}{B} \right)^+ \right].$$

Aufgabe 4: Viele exotische Optionen hängen von Funktionalen des Pfades $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$, wie $\max_{0 \leq t \leq T} S_t$ oder $\int_0^T S_t \, dt$, ab. Im Folgenden sei S eine geometrische Brownsche Bewegung mit Volatilität σ und Drift μ.

i) Man gebe Itô-Formeln für glatte Funktionen der Prozesse (t, S_t, A_t) und (t, S_t, M_t) an, wobei

$$A_t := \int_0^t S_s \, ds \qquad \text{und} \qquad M_t := \max_{0 \leq s \leq t} S_s.$$

ii) Man gebe partielle Differentialgleichungen (gegebenenfalls mit Randbedingungen) an, die eine glatte Funktion $v : [0, \infty) \times (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ erfüllen muss, damit $v(t, S_t, A_t)$ bzw. $v(t, S_t, M_t)$ Wertprozesse selbstfinanzierender Handelsstrategien sind.

Jede Aufgabe 6 Punkte