Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Antje Fruth
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

8.Blatt
Abgabe: 14.06.11

Aufgabe 1: Eine Europäische *Binary Call Option* (auch *Digital Call Option* genannt) zahlt zur Maturität T genau einen Euro aus, falls der Aktienkurs S_T größer oder gleich dem Strike K ist.

i) Man berechne im Black-Scholes Modell Preis und Wertprozess des Binary Call.
ii) Man berechne das zugehörige Delta.
iii) Man überlege sich, wie sich das Delta nahe der Maturität verhält, insbesondere wenn der Aktienkurs nahe des Strikes ist. Man erkläre das resultierende Phänomen anschaulich.

Aufgabe 2: Für eine Brownsche Bewegung W und Konstanten $v_0, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \gamma > 0$ definieren wir den *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* V als Lösungen der stochastischen Differentialgleichung

$$dV_t = \alpha(\beta - V_t)dt + \gamma dW_t,\ V_0 = v_0.$$

Man berechne die explizite Lösung V_t durch Anwendung der Itô-Formel auf $f(t, V_t) := e^{\alpha t} V_t$. Man zeige dann, dass V_t normalverteilt ist und berechne Erwartungswert und Varianz. Welche stationäre Verteilung ergibt sich, d.h. welche Verteilung hat V_t für $t \to \infty$?

Aufgabe 3: Es seien $B^1, \ldots, B^d$ unabhängige Brownsche Bewegungen auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Für Konstanten κ, $\sigma > 0$ definieren wir die *Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse* V^i, $i = 1, \ldots, d$, als Lösungen der stochastischen Differentialgleichungen

$$dV_t^i = -\frac{\kappa}{2} V_t^i\, dt + \frac{\sigma}{2}\, dB_t^i$$

mit $V_0^i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, d\}$.
Nun setzen wir

$$r_t := \sum_{i=1}^d (V_t^i)^2.$$

Man zeige, dass es eine Brownsche Bewegung W und eine Konstante θ gibt, so dass r Lösung der SDE

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)\, dt + \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t$$

ist und berechne θ.
Anmerkung: Dieser Prozess ist sehr populär bei der Modellierung von Aktienkursen mit stochastischer Volatilität, so wird etwa die Volatilität des Aktienkurses im *Heston*-Modell durch einen solchen Prozess modelliert. Auch in der Theorie der Zinsstrukturmodelle (die in den folgenden Vorlesungen behandelt werden wird) wird er oft zum Modellieren verwendet, hier heißt r *Cox-Ingersoll-Ross*-Prozess (oder kurz *CIR*-Prozess).

Aufgabe 4: Im Folgenden betrachten wir das Heston-Modell

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_t S_t \, dt + \sqrt{v_t} S_t \, dW_t^1, \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) \, dt + \xi \sqrt{v_t} \, dW_t^2, \end{aligned}$$

wobei W_t^1 und W_t^2 zwei Brownsche Bewegungen mit konstanter Korrelation $\rho \in]-1,1[$ sind.Weiterhin sei der Zinssatz r konstant und κ, θ und ξ positive konstanten und die Filtration wie üblich $(\mathcal{F}_t^{W^1,W^2})$, $t \geq 0$. Man gebe eine hinreichende Bedingung für ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q an, so dass Q ein äquivalentes lokales Martingalmaß ist.