Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Antje Fruth
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

9.Blatt
Abgabe: 21.06.11

Aufgabe 1: Wir betrachten das Dothan-Modell für die Zinsratenentwicklung

$$dr_t = a\, r_t\, dt + \sigma\, r_t\, dW_t^*$$

Man zeige, dass unter dem Maß P^*

$$E^*\left[e^{\int_0^t r_s\, ds}\right] = \infty$$

gilt.

Aufgabe 2: Man berechne im Cox-Ingersoll-Ross-Modell

$$dr_t = a(b - r_t)\, dt + \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t^*.$$

die bedingten Erwartungen und Varianzen

$$E^*[r_t|\mathcal{F}_s] \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}^*[r_t|\mathcal{F}_s].$$

Aufgabe 3: Wir betrachten im Vasiček-Modell

$$dr_t = (b - a\, r_t)\, dt + \sigma\, dW_t^*$$

ein *Zinsraten-Caplet* mit *Cap-Rate* R

$$(T_i - T_{i-1})\Big(L(T_{i-1}, T_i) - R\Big)^+.$$

Hierbei ist die LIBOR spot rate gegeben durch

$$L(S,T) = -\frac{P(S,T) - 1}{(T-S)P(S,T)}.$$

Man berechne den arbitragefreien Preis des Caplets, indem man es auf eine Put-Option zurückführt und diese dann im Vasiček-Modell preist.

Aufgabe 4: Wir betrachten im Folgenden die Varianz

$$dv_t = \alpha(\beta - v_t)\,dt + \gamma\sqrt{v_t}\,dW_t$$

im Heston-Modell mit α, β, $\gamma \geq 0$. Mit $P_t(v|v_i)$ bezeichnen wir die bedingte Dichte, definiert durch $P_t(v|v_i)\,da := P(v_t \in da|v_i = v_0)$.

i) Unter der Bedingung, dass die "Dimension" $d = \frac{4\alpha\beta}{\gamma^2}$ größer als 2 ist, leite man die Fokker-Planck-Gleichung für $P_t(v|v_i)$ her.

ii) Man berechne die invariante Verteilung von v explizit, indem man zeigt, dass die entsprechende Gleichung für stationäre Dichten (also $\frac{\partial}{\partial t}P_t(v|v_i) = 0$) der Dichte einer (geeignet parametrisierten) Gamma-Verteilung entspricht.